UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

JOÃO PAULO AMORIM E ELITON SIMES

CIVILIZAÇÕES EGÍPCIA, MESOPOTÂMICA E GREGA

RECIFE

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

JOÃO PAULO AMORIM E ELITON SIMES

CIVILIZAÇÕES EGÍPCIA, MESOPOTÂMICA E GREGA

Avaliação da disciplina de História da Matemática para composição da primeira nota, na Universidade Federal Rural de Pernambuco, no Mestrado Profissional de Matemática – Profmat.

Professor: Severino Barros

RECIFE

2022

EGITO

"Banhado pelo Rio Nilo, terras alagadas, fizeram germinar não só grãos mas uma sublime matemática da civilização antiga."

Eliton e João Paulo

A matemática Egípcia tem uma importância incomensurável para o mundo, em especial, para aqueles que admiram o surgimento de técnicas contextualizadas, produtos de uma busca por solução de problemas.

> ***"Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem... o rei mandava pessoas para examinar e determinar por medida a extensão exata da perda".*** (B.Boyer, 2012).

Percebemos o surgimento da matemática egípcia de acordo com a da necessidade da época, demonstrando riqueza em cada detalhe de sua história. Na sua agricultura, controle de estoque, calendário solar, suas pirâmides e entre outros aspectos marcados nessa cultura. Entretanto, acreditamos que muitos outros aspectos ficaram obscuros, escondidos na árdua tarefa histórica de decifrar e preservar os seus materiais-fonte. Toda uma ciência foi desenvolvida e anos foram esperados para termos uma noção do desenvolvimento daquela região no que diz respeito a matemática.

A escrita hieroglífica predominou nas inscrições por muitos séculos. E só com a evolução dos escritos, as práticas foram sendo decifradas com mais facilidades. Nos museus espalhados pelo mundo temos os Papiros como fonte histórica de registro. O Papiro Rhind[1] (ou Papiro de Ahmes) é um dos mais famosos, além, do Papiro de Moscou[2] que contém as principais informações de registros matemáticos.

Dentre todos os relatos estudados nesses registros, verificamos temas bastante abordados. O estudo das frações, talvez, seja um dos mais explorados. E seguindo as percepções iniciais, verificamos que problemas em dividir alimentos, repartir materiais e etc, foram grandes motivadores desses registros. A geometria também foi bastante destacada. Acreditamos que o rio Nilo contribuiu bastante com esse desenvolvimento,

---

[1] Mede 5,5 m por 0,32 m e possui um texto matemático com 85 problemas escrito pelo escriba Ahmes.
[2] Também conhecido por **Papiro de Golonishev**, mede 5,5 m por 8 cm e possui 25 problemas.

principalmente pelo cálculo de áreas próximas ao rio e pelo volume estimado em suas cheias. Muito relacionado a isso, o rio Nilo era considerado um rio "Educado", pois as estimativas eram confirmadas, classificando o rio como equilibrado e previsível em seus ciclos. Ainda na geometria acreditavam que o Teorema de Pitágoras já era conhecido. Mas a grande contribuição está atrelada a Geometria espacial. As pirâmides revelaram um grande poder até hoje admirado. Como construir uma obra tão gigante e moderna, tão sofisticada diante de tão poucos conhecimentos e estruturação didática revelada na época? Talvez por isso as pirâmides eram ligadas a divindades e poderes sobrenaturais. No geral, percebemos que a Geometria Egípcia era mais próxima de uma aritmética aplicada. Tudo isso, justamente pelas motivações características da região. Uma matemática desenvolvida na sombra da *mensuração*. Medir foi o principal ponto de observação e evolução da civilização egípcia.

A importância das contribuições egípcias para matemática reflete na sala de aula como um exemplo a ser seguido quando o assunto é aplicação. Por vezes, somos questionados pelos alunos onde utilizar determinados assuntos, e sendo assim a civilização egípcia nos dá a base dessa resposta. Uma matemática altamente aplicável, carregada de história e lógica. Transbordando em simbolismo, figuras e nuances. Afinal, existe algo de poder mais persuasivo numa aula de Geometria espacial do que representar a construção de uma pirâmide? Obviamente que não!

MESOPOTÂMIA

"A terra entre rios não é mera limitação de grãos diluídos em água. Há vasta matemática por trás produzida por aqueles que a cultivaram".

Eliton e João Paulo

As grandes contribuições matemáticas surgiram no quarto milênio antes de nosso tempo. Um grande progresso cultural, trazendo a escrita como um dos grandes pilares desse desenvolvimento, a roda e os metais. Na vanguarda do avanço egípcio, na região do vale mesopotâmico, existia uma civilização de alto grau de conhecimento. Construíram uma cidade com decorações em cerâmica e mosaicos com padrões geométricos. Seus governantes alocaram várias obras públicas de irrigação e canais para controlar as inundações[3] dos rios Tigres e Eufrates. Há de se fazer uma correção histórica, no sentido de confundir as civilizações mesopotâmicas com as babilônicas e, mesmo após a Babilônia ter sido dominada, a matemática babilônica continuou a se desenvolver ao longo do tempo. Por ser uma terra aberta a grandes invasões, as civilizações mesopotâmicas sofreram várias dominações e, seus invasores absorveram, gradualmente, a cultura local, principalmente a escrita cuneiforme.

Vários registros como leis, estórias, cartas pessoais e lições escolares eram talhadas em tábuas de barro e depois cozidas ao sol ou em fornos, gerando assim, grandes contribuições para a ciência ao longo do tempo[4]. Há em torno de 50.000 tábuas, só da região da antiga Nipur, espalhadas nas universidades de Columbia, Pennsylvania e Yale entre outras e algumas delas matemáticas. Com a análise dessas tábuas, certamente, pode-se verificar as grandes contribuições da civilização mesopotâmica para a matemática e que são utilizadas até hoje.

"A princípio, o escriba escrevia do alto para baixo em colunas da direita para a esquerda; mais tarde, por conveniência, a tábua era girada de 90º em sentido anti-horário, e o escriba escrevia da esquerda para a direita em linhas horizontais de cima para baixo."

Boyer, Carl. **História da Matemática.** 3.ed. americana: 2018 40 p.

[3] Diferentemente do Nilo, no Egito, as inundações do Tigres e Eufrates não eram previsíveis.
[4] Os registros em tábuas de barro eram mais resistentes do que o papiro egípcio.

Notoriamente, a escrita traz grande relevância dentre todas as contribuições, uma vez que, a partir dela as descobertas inerentes a vida cotidiana puderam ser registradas. A escrita cuneiforme, que usava símbolos estilizados, datada de mais de 5.000 anos atrás, possuía uns 2.000 símbolos e teve seu número reduzido a 1/3 após a conquista acadiana. Desenhos primitivos deram lugar a combinações de cunhas que utilizavam estiletes prismáticos triangular que, posteriormente, deram lugar a estiletes cilíndricos. É evidente que, adotamos, pelo menos em países ocidentais, a maneira de como escrevemos no papel seguindo o sentido que os mesopotâmios escreviam em suas tábuas.

O sistema posicional sexagesimal, utilizado até hoje na marcação dos minutos e segundos, a divisão da circunferência em 360 graus, são exemplos de contribuições absorvidas pelo mundo oriundos da civilização mesopotâmica. Explicar ao certo o porquê de tal sistema ser fortemente difundido nessa civilização é um tanto difícil, mas acredita-se que seja pelo fato da base 60 ser dotada de vários divisores e, com isso, pode-se chegar a mais partes em uma grandeza de base 60. Foi um sistema que durou bastante tempo a julgar pelo modo como ainda o utilizamos no nosso cotidiano matemático. Utilizavam poucos símbolos e com certo grau reduzido de repetições, bastando apenas dois símbolos que representavam a unidade e dezena, alinhado com um sistema posicional, fez dos mesopotâmicos divergirem da civilização egípcia[5]. Contudo, não havia uma representação direta para a posição vazia e isso, em alguns casos, levava a dupla interpretação. A exemplo, no nosso sistema, 122 e 7.202 tinham formas parecidas, pois utilizavam a mesma simbologia que, poderia ser interpretado como $2.(60)+2$ e $2.(60)^2+2$.

As frações sexagesimais foi outra contribuição, do ponto de vista matemático, deixado pela civilização mesopotâmica. Eles não demonstravam dificuldades em operar com a forma fracionária e dominavam com extrema facilidade as operações. Fazer adição ou multiplicação com os números 32,54 e 7,786 não representava maior dificuldade do que com os números inteiros 3.254 e 7.786. Dessa forma, puderam investir nessa descoberta. Podiam representar suas frações sexagesimais de forma idêntica aos números inteiros em sua base sessenta. A exemplo, $2+(60)^{-2}$. O mundo moderno herdou dos mesopotâmicos, também, as aproximações, coisa que eles dominavam perfeitamente. Há

[5] O sistema de numeração egípcio era dotado de grande quantidade de símbolos.

relatos de extração da raiz quadrada de 2 com erro de 0,000008, o que, para um engenheiro construtor de arranha-céus seja, suponho, suficiente.

Há inúmeras evidências de grandes feitos e heranças deixadas pela civilização mesopotâmica: tabelas para auxílios em cálculos, resoluções de equações mesmo sem existir a álgebra mostrando imensa habilidade no trato numérico e pensamento matemático, equações cúbicas resolvidas com o uso das tabelas pré-fixadas mostrando o grau extraordinário de flexibilidade da álgebra. Ainda podemos citar contribuições no que, supostamente, seria a trigonometria, mas não com o sentido que temos hoje. Não há significativas contribuições na geometria, limitando-se a tentativas do cálculo da área do círculo e volume do tronco de pirâmide. Em 1936, foram encontradas um grupo de tábuas que possuem uma boa aproximação[6] para π.

[6] Um valor de $3\, {}^{1}\!/_{8}$ tão bom quanto o que foi encontrado pelos egípcios.

GRÉCIA

"Da terra onde a arquitetura se mostra harmônica surge a matemática que se perpetua até hoje."

Eliton e João Paulo

O contexto de desenvolvimento da Matemática na Grécia passa por todo protagonismo do Mediterrâneo. Comércio, guerras e quedas de civilizações. A Matemática grega foi didaticamente dividida em três períodos: Clássico, Helenístico e período Romano. A matemática no período clássico consistiu num racionalismo característico dos povos jônicos. Questionar era a característica marcante nessa filosofia, pois não era apenas um estudo sobre a matemática, era uma busca pela verdade através da ciência. Busca incessante por desvendar o universo e ainda além disso, o papel do homem no universo. Mas, quais as contribuições da época? Onde foram reveladas? Alguns Papiros egípcios e estudos clássicos que revelaram as contribuições da matemática clássica: em especial na figura de Euclides, Arquimedes e Apolônio. Surge a Axiomática na teoria matemática que consistia num sistema de dedução lógica de demonstrações.

Toda essa sistemática grega é fundamental nos dias atuais nas aulas de matemática pois facilita uma construção lógica e contextualizada dos temas trabalhados em sala de aula. Arriscamos em dizer que foi uma das maiores contribuições para a Matemática. Os elementos, obra de Euclides, até hoje são referências. O teorema de Tales que foi um marco na Geometria entre tantas outras contribuições. Entretanto gostaria de destacar a Lógica matemática desenvolvida pelos gregos, pois sistematizou as demonstrações, conferindo credibilidade e ordem em tudo que se falava sobre matemática.

Os dois últimos períodos da sociedade antiga foram de total domínio do Império Romano. Siracusa[7], Cartago (atual Tunísia), Grécia, Mesopotâmia (atualmente Iraque, Irã e Jordânia) e Egito foram caindo um a um em total domínio de Roma que, reduziu todo o oriente a condição de colônia governada por administradores romanos. Era uma sociedade escravocrata o que dificultava o avanço da ciência e novas técnicas, uma vez que, os donos de escravos tinham certo medo do estímulo a sua inteligência e eles podiam

[7] Siracusa fica hoje em território italiano, mas já foi a maior e mais próspera cidade da Grécia Antiga.

fazer todo o trabalho braçal. A classe dominante, ao se aventurar no amadorismo do pensamento filosófico, trazia mediocridade nas artes e ciência. Essa economia escravagista entrou em declínio com o mercado de escravos e não existia homens para o progresso da ciência mesmo que medíocre.

Com uma aparente estabilidade do Império Romano, a ciência oriental continuava a florescer apresentando uma mistura de elementos helenístico e orientais. A *pax romana*[8], época da história romana marcada por uma aparente paz e prosperidade, durante a transição do período republicano para o período imperial, que trouxe a estabilidade ao Império Romano e garantiu a autoridade de Roma sobre suas províncias, durou dois séculos permitindo o avanço da ciência helenística pelo continente enveredando de Roma e Atenas até a mesopotâmia, China e Índia.

Alexandria ainda era o ponto central da matemática no oriente, com produções originais mesmo que, predominantemente, limitadas a comentários e compilações deixando-nos sem a certeza se essas compilações eram novas descobertas ou não. Talvez, pelo fato da geometria grega adotar um modo primitivo, e um tanto rigoroso, tenha levado a uma rejeição e ao avanço para nada além das secções cônicas. A álgebra e o cálculo foram deixados para a civilização oriental, que teve seu brilho apagado pela matemática grega. Grandes nomes surgiram da matemática Alexandrina como: Ptolomeu, Herão e Diofanto mostrando que o que ligava esses povos era a língua grega.

Alexandria desenvolveu papel importante na introdução da aritmética através de um dos primeiros matemáticos alexandrino, Nicómaco de Gerasa (c.100 d.C), relacionando os mesmos assuntos que aparecem no livro Os Elementos de Euclides. Um dos maiores, se não o maior, documento de Alexandria é a obra de Ptolomeu *Almagesto* (c.150 d.C.). Foi uma obra de extrema beleza sobre astronomia, mesmo que trazendo ideias de Hiparco e Kidinnu, matemáticos babilônicos. Continha trigonometria e uma tabela de cordas, onde continha o seno de vários ângulos. Nele encontramos, ainda, a fórmula para o seno e cosseno da soma e diferença de dois ângulos e o "Teorema de Ptolomeu" para um quadrilátero inscrito na circunferência, além de um estudo inicial sobre trigonometria esférica. Podemos destacar Menelau (c.100 d.C), cuja obra Sphaerica apresenta a geometria na esfera, juntamente com uma discussão sobre o triângulo esférico e o famoso "Teorema de Menelau" aplicado a triângulo esférico. Herão, por sua vez,

[8] A expressão *pax romana* vem do idioma oficial romano, o latim, e significa "paz romana".

descreveu com precisão um eclipse lunar (c.62 d.C), vários livros com assuntos geométricos, computacionais e mecânicos, revelando uma mistura das matemáticas grega e oriental. Em sua obra *Metrica*, ele apresenta sua famosa “fórmula de Herão” para o cálculo da área de triângulo em função do semiperímetro e dos lados, e encontramos frações unitárias[9] para o cálculo da $\sqrt{63} = 7 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16$. Diofanto (c.250 d.C) contribui para o crescimento da matemática oriental através de sua célebre obra *Arithmetica* na qual apenas seis livros originais sobreviveram. Não se sabe ao certo quem foi Diofanto, mas seus livros trazem um tratado fascinante da antiguidade greco-romana. Sua obra traz problemas para determinação das soluções das equações do tipo $Ax^2 + Bx + C = y^2$ e $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$. Tinha por característica procurar soluções racionais, pois dizia que as irracionais eram impossíveis. Dessa forma, ele era cuidadoso ao escolher seus coeficientes. Entre essas equações estão as do tipo $x^2 - 26y^2 = 1$ e $x^2 - 30y^2 = 1$ conhecidas atualmente como equações de Pell[10]. Diofanto utilizou, sistematicamente, símbolos algébricos. Tinha sinais próprios para incógnita, para o sinal de menos mesmo que sendo uma abreviatura e não com o sentido de sinal algébrico que temos hoje.

O último dos grandes matemáticos de Alexandria foi Papo, cuja sua coleção era um tipo de manual para o estudo da geometria grega e continha anotações históricas com demonstrações de teoremas, aperfeiçoamento e alterações. Sua obra tem uma grande significância pois os resultados de autores que conhecemos hoje são conhecidos sob a forma como Papo os escreveu. A escola de Alexandria foi desaparecendo, gradualmente, com o declínio da civilização antiga, cabendo aos comentadores[11] perpetuar a memória da ciência grega e a filosofia na língua grega. Essas escolas foram interrompidas por serem consideradas pagãs[12] que foi o caso da Academia em Atenas. Não há por que achar que os árabes destruíram a biblioteca de Alexandria, pois, provavelmente ela já não existisse com a chegada dos árabes. As conquistas árabes não mudaram o caráter dos estudos matemáticos no Egito. Talvez possa ter havido um retrocesso, mas quando se trata da matemática egípcia é seguindo a tradição greco-oriental.

---

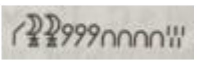
[9] As frações unitárias eram puramente egípcias.
[10] Foi nomeada em homenagem ao matemático inglês John Pell.
[11] Comentários de Proclo e Hypatia (assassinada pelos seguidores de São Cirilo) tornaram-se históricas.
[12] As escolas eram consideradas um baluarte do paganismo contra o progresso do cristianismo.

Muito do que conhecemos hoje, na época, não tinha o mesmo sentido. Podemos ver a concepção de número real que temos hoje não era conhecida. Um segmento de reta nem sempre tinha um comprimento. Quando Euclides se referia a área de um triângulo ele tinha de dizer que a área de um triângulo é metade da área de um paralelogramo de mesma base situado entre as mesmas paralelas. Isso nos faz refletir se a concepção de altura não era a mesma que temos hoje. O teorema de Pitágoras era tratado como a relação entre as áreas de três quadrados e não entre três medidas como se é hoje. A logística era conhecida como cálculo vulgar e se manteve viva durante todo o período da história grega. Teve a resistência de Euclides, mas foi abraçada por Arquimedes e Herão. Usavam o alfabeto grego, assim como fazemos hoje na representação de ângulos e planos, para representar os algarismos de 1 a 9 e, depois, as dezenas e centenas. Esse sistema aparece nos manuscritos de Arquimedes, Herão e de outros autores clássicos. Era um sistema não posicional, com a existência de vinte e sete símbolos, no mínimo, e tem sido interpretado como provas da inferioridade do sistema. Deveria apresentar alguma vantagem devido ao longo tempo em uso por mercadores gregos, mesmo que em transações complicadas, durante todo o império romano até seu final em 1453. Por meio de notação própria, o cálculo fracionário parece ser simples, mas sofria resistência dos gregos por não ter um sistema uniforme. Usavam as frações unitária egípcias, sexagesimais babilônicas e algumas notações que lembram a atual. Mais tarde, com o Renascimento europeu, começou a fazer-se o uso das frações decimais devido ao aparelho computacional ser estendido para muito mais além do uso na antiguidade. Contudo, as frações decimais não foram adotadas nos livros de estudos, deixando para as autorias do século XVIII e XIX.

Elaboração de problemas – EGITO

1. Na antiguidade, os egípcios já trabalhavam na Geometria sabendo que a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura. Demonstre a veracidade dessa fórmula por uma justaposição de figuras. OBS: Perceba que o triângulo isósceles pode ser dividido em outra categoria de triângulo.
2. Sabemos das grandes contribuições para as ciências reveladas na civilização egípcia. Trabalhos de arqueólogos e historiadores revelaram a dificuldade no estudo das fontes daquela época. Entretanto, muitos registros em Papiros foram estudados e expostos em grandes museus ao redor do mundo. O Papiro Rhind (um dos mais famosos) revelava diversos problemas matemáticos, uns até considerados divertimentos à época. Segue abaixo um problema nesse modelo.

   Sabendo-se que 3 gatos pegam 3 ratos em 3 minutos, quanto tempo levam 100 gatos para pegar 100 ratos?
3. O fértil vale do Nilo tem sido descrito como o maior Oásis do mundo no maior deserto do mundo. Nas suas margens, férteis, existiam áreas demarcadas para o cultivo dos mais variados alimentos. Propriedades de 800 metros quadrados das mais variadas formas geométricas. Pergunta-se, quais formas geométricas essas propriedades poderiam possuir nessa área citada acima? Quais as dimensões?
4. De acordo com Boyer (p.30), o sistema, tão antigo quanto as pirâmides, baseava-se na escala de dez e apresentava alguns símbolos: Um traço vertical representa uma unidade, um V invertido indicava 10, um laço valia 100, uma flor de lotus, 1000, um dedo dobrado, 10.000, um peixe indicava 100.000 uma figura ajoelhada, 1.000.000. Pelo que se sabe, não há uma ordem específica. Dessa forma, no nosso sistema, o número 12.345, se escrevia como:

   Utilizando o mesmo sistema, escreva a representação do número 29.384.
5. Ainda, segundo Boyer (p.31), eles se sentiam à vontade com a fração 2/3, chamada de complemento da fração unitária 1/3. Tais complementos, na forma n/(n+1), tinham símbolos especiais e consideravam mais fácil encontrar o complemento 2/3 para, assim, encontrar 1/3 tomando a metade disso.

   Seguindo esse raciocínio, descreva os passos de como tomar a fração unitária 1/5 a partir de seu complemento?

6. Considerando o que foi dito em Boyer (p.31), na matemática atual, 3/5 é uma fração irredutível. No entanto, para a matemática egípcia, tal fração é redutível e escrita como a soma das frações unitária 1/3, 1/5 e 1/15. Verifique!

   Encontre duas frações unitárias que a soma resulte na fração 2/5.
7. Segundo Boyer (p.31), para facilitar a redução de frações próprias “mistas” à soma de frações unitárias, o Papiro de Rhind começa com uma tabela fornecendo 2/n como soma de frações unitárias para todos os valores $5 \leq n \leq 101$. Dessa forma, podemos decompor através da soma:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{2.3.n}$$

   Utilizando o processo descrito acima, de componha 2/7.
8. Um trecho do livro de Boyer (p.32) mostra a adição como a operação fundamental e a operação de multiplicação era feita por sucessivas duplicações. É evidente que as duplicações eram obtidas adicionando o mesmo número e, na tentativa de multiplicar 69 por 19, seria efetuada a soma de 69 com ele mesmo para obter 138, depois adicionando este valor a si próprio para alcançar 276, novamente duplicando para obter 552, e mais uma vez, dando 1.104, que é, naturalmente, dezesseis vezes 69. Com 19 = 16 + 2 + 1, o resultado da multiplicação de 69 por 19 é 1.104 + 138 + 69 = 1.311.

   Descreva os passos, usando o mesmo processo egípcio, e obtenha a multiplicação de 59 por 21.
9. Conforme Boyer (p.36), há uma referência no que seria hoje a cotangente de um ângulo. Um conceito introduzido, evidentemente, no que seria para nós hoje, a cotangente de um ângulo. Nas construções de pirâmides era comum manter a mesma inclinação entre as paredes e a palavra *seqt* significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade de altura. A unidade de comprimento vertical era o cúbito, mas para medir a distância horizontal a unidade usada era a “mão”, das quais havia sete em um cúbito. Portanto, o *seqt* da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pelo vertical em mãos por cúbito.

   Utilizando as definições apresentadas para *seqt*, resolva o seguinte problema:

   Dada uma pirâmide que possui 250 cúbitos de altura e uma base quadrada com lado de 360 cúbitos, encontre o *seqt* da parede dessa pirâmide em mãos por cúbito. Como você expressaria essa resposta em fração unitária?

10. Com um *seqt* de $5\,{}^{1}/_{2}$ mãos por cúbito, obtenha a altura de uma pirâmide, de base quadrada, que possui 440 cúbitos de lado da base. Expresse a resposta na unidade conveniente para a época.

BIBLIOGRAFIAS

Boyer, C. B; Merzbach, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. Americana: 2018

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradiva,1987